УДК 004.031

Г.Н. Востров, А. Атие, К. Левенец, М. Годынский
Одесский национальный политехнический университет, пр. Шевченко, 1, Одесса

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

В статье приводится содержательная интерпретация понятия информация. Рассматриваются методы формализации термина информация на основе теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов.
Ключевые слова: *Информация – Стохастический процесс – Количество информации*

The contents interpretation of the concept "information" is given in the article. Methods of formalizing the term "information" based on the theory of probability, mathematical statistics and theory of stochastic processes are considered.
Key words*: Information – Stochastyc process – Amoumt of information*

I. ВВЕДЕНИЕ

Основоположник синергетики Г. Хакен в своих работах неоднократно обращает внимание на то обстоятельство, что использование термина зачастую приводит к многочисленным недоразумениям [1, 2, 3]. Это обусловлено тем, что понятие «информация» имеет много различных смысловых значений.

Прежде всего, остановимся на весьма значительном многообразии различных потребностей смыслового содержания понятия информация. Многообразие всех пользователей этого понятия на содержательном уровне можно разделить на два класса. К первому классу отнесем всех тех членов человеческого мирового сообщества, кто сталкивается с необходимостью принятия решений в самоорганизующихся стохастических нелинейных динамических системах. При этом для принятия эффективного или оптимального решения относительно заданного критерия требуются точные или приближенно представленные, с требуемой точностью, сведения о мерах неопределенности знаний о вероятностях наступления различных событий, законах распределения случайных величин, статистических оценках или точных значениях различных их характеристик или параметров. К характеристикам относится множество начальных и центральных моментов любых порядков, коэффициенты ковариации и корреляции, ковариационные и корреляционные матрицы, коэффициенты асимметрии и эксцесса, корреляционное отношение и многие другие.

II. ОСНОВЫ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Особый класс стохастических процессов связан со всеми самоорганизующимися нелинейными стохастическими динамическими системами. Содержательный и математический анализ таких систем, а также процессы их моделирования обуславливают необходимость владения информацией о таких сложных системах, которая, как правило, имеет весьма высокий уровень сложности, которая порой превосходит сложность самих систем этого класса.

Примером информации отражающей фундаментальные свойства такого рода динамических систем является стохастический и детерминированный хаос, возникающий в трудно прогнозируемые моменты времени в системах этого класса, катастрофы бифуркации и мультифуркации, странные аттракторы, предельные циклы, процессы разрушения топологической структуры динамических систем, прогнозирование законов эволюционного развития их, начиная с любого заданного момента времени E_0.

Кратко перечисленные формы информации могут быть полезными в теории принятии я решений в системах приведенного типа только при одном условии – любая теория принятия решений должна основываться на четком содержательном описании любой используемой информации и достаточно точной формализации любой формы информации средствами современных математических теорий различных классов.

Важный класс систем образуют системные области. Они также в большинстве случаев относятся к самоорганизующимся, саморазвивающимся, самосовершенствующимся и другим процессам самостоятельного формирования стратегий развития нелинейных стохастических динамических систем. Математическая теория предметных областей до настоящего времени не построена в силу, как правило, большой и их сложности. Для предметных областей в большинстве случаев отсутствует достаточно полное и адекватное их физической природе содержательное описание и представление.

Таким образом, содержательная интерпретация термина «информация» в различных научных направлениях, как при их математическом моделировании, так и при решении в их средах различных классов прикладных проблем, имеет большое количество вариантов их определения, которые существенно отличаются друг от друга. Необходимо отметить, что применение понятия «информация» весьма часто связано с стохастическими явлениями предметных областей, стохастических нелинейных динамических систем, в которых стохастичность присутствует в самых разнообразных формах.

В реальной действительности относительно сложных систем исследования, специалисты в области построения математических моделей стохастических явлений владеют в значительной степени неопределенной информацией. Раскрытие неопределенностей относительно всех стохастических характеристик, функций распределения вероятностей, и многих других интересных свойств сложных зависимостей между случайными процессами, является первой проблемой, в которой мера неопределенности выступала в качестве меры информации, полученной в результате статистических испытаний.

Алгоритмические подходы к построению мер количества информации появились по существу в конце XX века. При этом проблема построения информационной теории на основе алгоритмической теории остается в том же состоянии далеком от завершения. Это состояние информационной теории, особенно характерно для такого научного направления, как информационные технологии.

Необходимо отметить, что информационные технологии с алгоритмической точки зрения существенно зависят от многообразия свойств, зависимостей между ними и топологической структуры информационных систем. Анализ и математическое моделирование информационных систем определяют свойства, метрику и пространственное строение информационного пространства, создаваемого на основе информационных систем с помощью математических методов информационных технологий.

Следует заметить, что информационные системы в процессе своего эволюционного развития приобретают все более сложные свойства, требующие все более точного формального определения алгоритмов оценивания темпов возрастания внутренней сложности информационных систем наряду со сложностью их взаимодействия с внешней средой.

В настоящее время объектом внимания являются информационные системы, которые оказывают существенное влияние на развитие различных направлений научных исследований и обеспечивают высокие темпы эволюционного развития научно-промышленного комплекса мировой экономической системы. К таким информационным системам следует отнести стохастические динамические системы общего вида, самоорганизующиеся нелинейные стохастические динамические системы, предметные области, которые все включают на всех уровнях сложности структур подобластей, классов объектов и многообразий их свойств, описываемых случайными одномерными и многомерными процессами различных типов, случайными функциями. В более простых вариантах представления свойств стохастических нелинейных динамических систем информация может быть связанной с явлениями стохастической природы. Однако проблема формализации термина при этом не становится более простой. Для этого существует возможность решения этой проблемы на основе теории алгоритмов [4]. Однако, при этом возникают довольно трудные алгоритмические проблемы, связанные с алгоритмической сложностью.

Вторая категория пользователей термина информация не допускает возможности его использования при отсутствии формальной теории информации с одновременной возможностью содержательной интерпретации каждого варианта формализованного носителя информации. Эта ситуация весьма существенна при создании математических основ информационных технологий. Следует признать, что настоящее состояние информационных технологий находится весьма далеко от создания такой теории.

Необходимо отметить, что отмеченные классы информационных систем возникли в течение последних нескольких десятилетий. Термин «информация» во всех таких системах играет особенно важную роль. Без количественной информации не удастся построить формальную модель процессов самоорганизации (или других подобных процессов структурной организации динамических систем и предметных областей), теории хаоса и математической теории приведения к порядку [5]. Еще более сложные проблемы возникают при построении выбора оптимальной эволюционной траектории дальнейшего развития в точке бифуркации, а еще сложнее – в точке мультифуркации. Управление информационными системами в областях странных аттракторов без формального описания их информационных свойств становится невозможным.

Проблема получения математических моделей фазовых траекторий самоорганизующихся нелинейных динамических систем не может быть построена без формализации всех ее фундаментальных информационных образующих. К числу важных базовых информационных компонентов относятся законы распределения вероятностей стохастических свойств систем отмеченных классов. Репрезентативные выборочные совокупности случайных свойств информационных систем достаточно просто формируются в силу того, что эти системы и создаются для информационного обеспечения систем информационных технологий путем формирования информационных пространств. В дальнейшем будут представлены методы построения некоторых классов информационных мер и методов оценивания информации об информационных объектах.

III. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФОРМАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОЦЕНИВАНИЯ КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ

Известно, что главной задачей математической статистики является разработка методов, позволяющих извлекать максимально полную информацию об представляющих интерес явлениях из ограниченной по объему совокупности данных, полученных в результате испытаний над информационной системой. Результаты испытаний отражают свойства, закономерности информационной системы. Анализ и обработка накопленных данных может адекватно осуществляться информационными технологиями, целенаправленно разрабатываемыми для получения необходимой информации представленной в формальной форме.

Первые шаги в направлении уточнения термина информация были сделаны Р.А. Фишером, который является основателем большей части современной математической статистики. Им было впервые предложено для измерения количества информации использовать выражение

$$I(\theta,\theta+\Delta\theta)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{K}\sum_{\beta=1}^{K}q_{\alpha\beta}\Delta\theta_{\alpha}\Delta\theta_{\beta} \quad (1)$$

где θ и $\theta+\Delta\theta$ – соседние точки k-мерного параметра $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_k)$, $q_{\alpha\beta}$ – коэффициент разложения $I(\theta, \Delta\theta)$ в ряд Тейлора в k-мерном параметрическом пространстве, которое по предположению является открытым выпуклым множеством в k-мерном евклидовом пространстве [3].

Предложенное выражение достаточно сложно в вычислительном отношении, а поэтому различные авторы, такие как Кульбак, Шеннон, Фишер первыми заметили, что понятие информации нуждается в уточнении. Для уточнения были использованы достаточные статистики. Достаточные статистики можно рассматривать как такую выборочную совокупность, которая содержит всю содержащуюся в выборочных данных информацию о параметрах.

Рассмотрим более точные формальные определения информации на основе теории вероятностей и математической статистики. Ротстейн ввел определение информации как «чистая математика, оперирующая измеримыми множествами с выбором из альтернатив неопределенного характера». Гильберт утверждает, что «информация – это такая мера времени или стоимости, которая в частности нужна инженеру при планировании эксперимента».

Необходимо заметить, что идеология информации вырастает из беспорядка, мерой которого является энтропия. В дальнейшем будем рассматривать информацию, исходя из предположения, что проводя статистические испытания, мы преследуем цель найти информацию. Возникает вопрос – насколько полные выводы о выборочной совокупности мы можем сделать на основе некоторой серии статистических испытаний. При этом нами преследуется цель в рассмотрении возможных ответов на этот вопрос в виде формального определения в такой математической форме, при которой получаем меру количества информации, которая допускает четкую содержательную интерпретацию.

Рассмотрим более детально меры количества информации, предложенные и исследованные Фишером [3], Шенноном [4] и Кульбаком [5]. Выражение (1) представляет первый вариант меры количества информации, предложенный Фишером, исходя из достаточно простых статистических соображений. Он задолго до появления фундаментальных работ по теории информации, опубликованных Шенноном, заметил, что это выражение нуждается в существенном уточнении. Такое уточнение было построено им на основе теории достаточных статистик, то есть такого подмножества выборочных данных, которое содержит «всю имеющуюся в этих данных» информацию о параметрах.

Анализ выборочных данных показывает, что неопределенность исхода статистических испытаний при описании их статистической моделью (x, β, $\{P_\theta$, $\theta\in\Theta\}$) состоит из двух компонент: неопределенности вероятного характера, обусловленной случайным процессом процедуры, реализующей x в соответствии с распределением вероятностей P_θ и некоторой неопределенностью, обусловленной отсутствием даже приближенной информации об истинном значении параметра θ. Заметим, что параметр θ определяет закон распределения вероятностей случайной величины x.

Нетрудно показать, что зависимость случайной выборки X от случайной величины Θ описывается условной плотностью

$$fX|\Theta(X|\Theta)=f_{\Theta}(X) \quad (2)$$

Информация о Θ, которая содержится в случайной выборке X=$\{x_1, \ldots, x_n\}$ полностью описывается условной плотностью распределения вероятностей

$$fX|\Theta(X|\Theta)=fX.\Theta(X,\Theta)/f_X(X)= f_{\Theta}(X)f_{\Theta}(\Theta)/f_X(X)=fX|\Theta(X)f_{\Theta}(\Theta)/f_X(X), \quad (3)$$

где предполагается, что меры P_θ и Θ задаются соответствующими плотностями распределения вероятностей и выражением

$$f_X(X)=\int\ldots\int f_{\Theta}(X)f_{\Theta}(\Theta)\,d\Theta_1\ldots d\Theta_k \quad (4)$$

Выражение условной функции плотности распределения вероятностей (2) параметра Θ, принято называть апостериорной условной плотностью распределения вероятностей.

IV. МЕРА КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ ПО ШЕННОНУ

Используя байесовский подход к определению приведенных условных вероятностей и математическую теорию достаточных статистик, являющихся носителем практически всей полезной информации о неизвестном параметре θ, построим меру количества информации в соответствии с идеологией Шеннона в упрощенной форме. Отметим, что понятие информации пока что не имеет точного математического представления. Именно описанный байесовский подход с учетом того, что как выборка значений случайной величины, так и оценки параметра, являются случайными величинами, а поэтому к ним применимы понятия количества информации и энтропии в математической форме предложенной Шенноном.

Предположим, что задано вероятностное пространство (Ω, A, P), где Ω – полное множество элементарных случайных событий конечной мощности, A – некоторое множество подмножеств Ω образующее σ-алгебру и P – вероятностная мера определенная над множеством A и многообразием всех подмножеств σ-алгебры A. Предположим, что заданы X и Θ, которые относятся к классу дискретных случайных величин, принимающих на некотором вероятностном пространстве (Ω, A, P). Рассмотрим отображение данного вероятностного пространства в измеримые пространства (H, B) и (Θ, Γ), так что при этом выполняются условия:

$$\Theta(\theta) = P(\Theta = \theta),\ P_\Theta(X) = \ P(X = x|\Theta = \theta) \qquad (5)$$

Подобного рода преобразование строится так, что при проведении каких-либо наблюдений все сведения о значениях, которые может принять Θ, подчиняются закону распределения вероятностей $\Theta(\theta)$, которое будем считать априорным. Положим, что стало известным значение x, принятое при построении случайной выборки X. Очевидно, что вся полнота информации о Θ содержится в условном распределении

$$P(\Theta = \theta|X = x) = P(\Theta = \theta, X = x)/P(X = x),$$

которое в статистике принято называть апостериорным. В результате проведенного опыта полученная дополнительная информация изменила степень неопределенности нашей информации о возможном значении θ. Изменения заключаются в переходе от априорного распределения к апостериорному.

Теперь возникает необходимость определить меру различия между этими распределениями вероятностей и тем самым оценить информацию, полученную в результате испытаний. В качестве такой меры используем величину разности

$$P(\Theta = \theta) - P(\Theta = \theta|X = x). \ (6)$$

На основе первых результатов Фишера при построении меры количества информации можно сделать вывод, что для оценки количества информации более полезно и удобно использовать логарифм этого отношения. Особенно важно использование логарифмической меры расхождения в величине информации, содержащейся в случайном событии $A = \{X = x\}$ относительно события $B = \{\Theta = \theta\}$.

Величина расхождения приобретает форму

$$I_{\Theta,X}(\theta,\ x) = \log(P(\Theta = \theta|X = x)/P(\Theta = \theta). \qquad (7)$$

Представим это выражение в симметрической форме:

$$I_{\Theta,X}(\theta,\ x) = \log\frac{P(\Theta=\theta|X=x)}{P(\Theta=\theta)\cdot P(X=x)}. \qquad (8)$$

Заметим, что равенство информации вовсе не означает равнозначности выводов, которые можно сделать об A из информации о B и наоборот, о B из информации об A.

Рассмотрим случай, когда A=B. В этом случае очевидно $P(B|A) = 1$ и очевидно, что информация A относительно B определяется соотношением

$$\log\left(\frac{1}{P(B)}\right) = \log\left(\frac{1}{P(\Theta=\theta)}\right) \equiv I_\Theta(\theta), \quad (9)$$

что означает полное определение события B.

Информация, определяемая соотношением (9), недостаточна для определения A на основе B, если только A и B не совпадают с вероятностью единица. Это свидетельствует о том, что собственная неопределенность событий A и B, вообще говоря, различна. Примем выражение (9) в качестве собственной меры неопределенности события B, или, другими словами, ее будем рассматривать как собственную информацию, содержащуюся в событии B, о самом себе. Такую информацию можно интерпретировать как информацию, необходимую для полного разрешения неопределенности относительно события B. С учетом такой интерпретации получаем равенство:

$$\log\left(\frac{1}{P(\Theta=\theta|X=x)}\right) \equiv I_{\Theta|X}(\theta|x), \qquad (10)$$

которое можно назвать условной собственной информацией, содержащейся в событии $\{\Theta = \theta\}$ при условии события $\{X = x\}$, и с содержательной точки зрения эту информацию можно рассматривать как информацию, необходимую для определения события $\{\Theta = \theta\}$ после того, как стало известно, что $X = x$. поэтому разность

$$I_\Theta(\theta) - I_{\Theta|X}(\theta|x) = I_{\Theta|X}(\theta|x) \qquad (11)$$

предложено рассматривать как информацию, содержащуюся в событии $\{X = x\}$ относительно события $\{\Theta = \theta\}$, а следовательно, она совпадает с взаимной информацией (7).

В мере информации по Шеннону [4] она определяется для отдельных событий $\{\Theta = \theta\}$, $\{X = x\}$, но с общей точки зрения желательно, чтобы меру количества информации можно было определять относительно Θ и X как случайных величин. Этого можно достичь путем усреднения определенных количеств информации по всем значениям используемых значений случайных величин. Для достижения этой цели введем понятие энтропии как среднего значения собственной информации.

Энтропия Θ определяется посредством выражения

$$H(\Theta) = \sum_{\Theta} P(\Theta = \theta) I_\Theta(\theta) =$$
$$\sum_{\Theta} P(\Theta = \theta) \log P(\Theta = \theta) \qquad (12)$$

Средняя условная энтропия Θ при условии X определяется равенством

$$= \sum_{\Theta,X} P(\Theta = \theta, X = x) I_{\Theta|X}(\theta|x) =$$
$$= -H(\Theta|X) \sum_{\Theta,X} P(\Theta = \theta, X = x) \log P(\Theta = \theta|X = x) \qquad (13)$$

Средняя взаимная энтропия между Θ и X получается усреднением формулы (13) и в результате приобретает вид:

$$I(\Theta, X) = H(\Theta) - H(\Theta|X) \qquad (14)$$

Формула (1.13) определяет меру информации по Шеннону для исходных предположений рассмотренных в начале относительно неизвестного параметра Θ неизвестного закона распределения вероятностей некоторой случайной величины представленной выборкой X. Мера информации по Шеннону обладает совокупностью свойств, которые должны быть характерными для любой другой вероятностной формализации понятия «информация».

К множеству таких свойств следует отнести следующие наиболее существенные характеристики:

1. Информация всегда неотрицательна $I(\Theta, X) \geq 0$;

2. Если статистика $T(x)$ подобная, то $I\big(\Theta, T(X)\big) = 0$;

3. Информация, содержащаяся в статистике, не превосходит информации, содержащейся во всей выборке:

$$I\big(\Theta, T(X)\big) \leq I(\Theta, X);$$

4. Если $T(x)$ – достаточная статистика для $(x, \beta, \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$

$$I\big(\Theta, T(X)\big) = I(\Theta, X)$$

Прежде чем приступить к детальному анализу перечисленных свойств заметим, что построенная мера информации основана на байесовском подходе в математической статистике. При этом, как отмечалось выше неопределенность испытаний, описываемых моделью $(x, \beta, \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$ определяется двумя составляющими: неопределенностью вероятностного характера, обусловленного случайным процессом, реализующим x-результат испытания на основе функции распределения вероятностей P_θ и неопределенностью второго типа, обусловленной незнанием истинного значения θ_0 параметра θ, числовое значение которого определяет реализация X.

По существу мы имеем две неопределенности, которые позволяют построить информационную меру количества информации на основе байесовского подхода. Приведенное построение теоретически выглядит правдоподобным и обоснованным. Однако, при этом существуют проблемные моменты. Мы сделали предположение, что распределение вероятностей характеризуется параметром Θ, но при этом отсутствует информация о статистике $\varphi(X) = \overline{\Theta}$, которая позволяет оценить Θ с приемлемой точностью. Даже при предположении, что X является производной репрезентативной выборочной совокупностью, мы не располагаем информацией о функции распределения вероятностей соответствующей случайной величины.

Отсутствует информация о том, какими параметрами она характеризуется, какой содержательный смысл неизвестных параметров, и как они определяются в теории вероятностей.

Предположим, что функция распределения вероятностей случайной величины в общем виде представляется в следующей форме $F(x, \theta_1,...,\theta_k)$. Положим, что параметр $\theta \in (\theta_1,...,\theta_k)$. Обозначим $\theta_1 = \theta$. Пусть x полученная выборная совокупность и $\theta = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ – оценка с помощью статистики $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, которая определяет случайную величину θ. Статистика $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ для θ строится на основе метода максимального правдоподобия на основе статистической модели $(x, \beta, \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$.

Кульбак доказал, что в качестве меры информации в точке x для различения в пользу θ_1, против θ_2 можно использовать выражение [5]

$$I(\theta_1 : \theta_2, x) = \log\left(f_{\theta_1}(x)/f_{\theta_2}(x)\right) \quad (15)$$

Используя байесовский подход, найдем в соответствии с мерой Шеннона взаимную информацию по Шеннону между x и θ:

$$I_{\Theta,X}(\theta_i, x) = \log\left(f_{\theta_i}(x)/f_X(x)\right), i = 1, 2 \quad (16)$$

Найдем разность равенств (16) при i =1, 2. При этом получаем соотношение

$$I_{\Theta,X}(\theta_1, x) - I_{\Theta,X}(\theta_2, x) = \log\left(f(\theta_1, x)/f(\theta_2, x)\right) = \\ = I(\theta_1 : \theta_2, x)$$

Из этого выражения следует, что различающая информация в пользу f_{θ_1}, по сравнению с f_{θ_2}, в точке x по Кульбаку равна разности информаций по Шеннону о θ_1 и θ_2, содержащихся в x вне зависимости от априорного распределения.

Найдем среднюю различающую информацию в пользу f_{θ_1} относительно f_{θ_2}, на основе меры P_{θ_1} путем вычисления среднего значения (15) по этой мере:

$$\mathrm{I}(\theta_1 : \theta_2) = \int \ldots \int \mathrm{I}(\theta_1 : \theta_2, x) f_{\theta_1}(x)\, dx_1 \ldots dx_n = \\ = \int \ldots \int f_{\theta_1}(x)\ \log\left(\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_2}(x)}\right) dx_1 \ldots dx_n \quad (17)$$

При этом предполагаем, что носитель меры P_{θ_1} содержится в носителе P_{θ_2}, а поэтому интегрирование распространяется для всех x.

Мера информации по Кульбаку обладает следующими свойствами 5:

1. мера всегда неотрицательна, т.е. $\mathrm{I}(\theta_1 : \theta_2) \geq 0$;
2. Если S (x) – некоторая статистика, то

$$\mathrm{I}_{S(x)}(\theta_1 : \theta_2) \leq \mathrm{I}_X(\theta_1 : \theta_2)$$

При этом равенство достигается только тогда, когда $S(x)$ является достаточной статистикой [6].

Меры Кульбака и Шеннона не допускают содержательной интерпретации получаемых с их помощью количественных оценок. В случае меры Шеннона мы можем сделать вывод о виде количественной оценки, насколько уменьшается неопределенность информации о параметре θ, если получаем дополнительные выборочные данные о случайной величине. При передаче информации по каналам связи такая информация может иметь существенный смысл. Однако, при этом мы не получаем дополнительной информации о законе распределения вероятностей случайной величины и ее параметрах, и, тем более, характеристиках. Мера Кульбака имеет количественное выражение, однако, получаемая количественная оценка $I_X(\theta_1 : \theta_2)$ позволяет сделать вывод о различении между θ_1 и θ_2 на основе выборочных данных.

Информация по Фишеру ориентирована на скалярный параметр θ и строится на основе информации по Кульбаку на основе очевидного соотношения

$$\mathrm{I}(\theta, \theta + \Delta\theta) = \int \ldots \int f(x, \theta)\ \log(f(x, \theta)/f(x, \theta + \Delta\theta))\, dx_1 \ldots dx_n \quad (18)$$

В результате преобразований и дифференцирования по θ получаем выражение]

$$\mathrm{I}(\theta) = \mathrm{M}_\theta \left(\frac{\partial \log f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 \quad (19)$$

Данное выражение определяет меру количества информации θ на основе выборочных данных x.

Полученное выражение как мера информации обладает следующими свойствами:

1. Если $S(x)$ – подобная статистика, то имеет место неравенство

$$I_{S(x)}(\theta) \geq 0 \text{ при } \theta \in \Theta$$

2. Для любой статистики $S(x)$ имеет место неравенство

$$I_{S(x)}(\theta) \leq I_X(\theta) \text{ при } \theta \in \Theta$$

3. Если $S(x)$ – достаточная статистика, то

$I_{S(x)}(\theta) = I_X(\theta)$

4. Если $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$ и x_1 и x_2 независимы для каждого P_θ , $\theta \in \Theta$ и для каждой x_1 и x_2 определена информация по Фишеру, то справедливо равенство

$I_{X_1 \cdot X_2}(\theta) = I_{X_1}(\theta) + I_{X_2}(\theta)$.

Мера Фишера определяет меру информации о параметре θ на основе статистики X, однако, из этой меры не следует в какой степени получаемая оценка θ близка к ее истинному значению. И в данном случае мера информации носит качественный характер, несмотря на ее количественную оценку.

Очевидно, что меры информации по Фишеру, Шеннону и Кульбаку могут быть использованы при статистических методах оценивания характеристик и параметров случайных величие, как математический метод проверки статистической достаточности и корректности полученных оценок. Однако, меры Шеннона и Кульбака позволяют получить количественную величину степени неопределенности информации о некотором параметре θ при условии, что мы получаем некоторые сведения о случайной величине X.

Ариорные сведения об X и θ носят весьма неопределенный характер.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенная теория статистического оценивания законов распределения случайных величин на основе теории Гливенко позволяет получать апостериорное представление неизвестного закона распределения вероятностей. При этом, путем достаточно точного решения задачи теории аппроксимации выборочной функции распределения вероятностей можно найти такую аппроксимирующую функцию с параметрами, которые будут адекватно отражать множество ее параметров. Как следствие, можно построить эффективные оценки для любых характеристик, используя метод максимального правдоподобия, математическую теорию доверительного оценивания. Развитая теория проверки статистических гипотез открывает путь к получению достаточно точной информации, представленной в количественной форме с хорошими перспективами их содержательной интерпретации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хакен Г., Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. М.: URSS, 2005 г., 245 с.
2. Хакен Г., Синергетика: иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985, 408 с.
3. Фишер Р.А., Статистические методы для исследователей. М.: Гостехиздат, 1958, 428 с;
4. Шеннон К., Работы по теории информации. ИЛ, 1963, 493 с.
5. Кульбак С., Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967, 402 с.
6. Козлов М.В., Прохоров А.В.Введение в математическую статистику.М.: Издательство Московского университета, 1987, 264с.